POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Haz las siguientes divisiones:

a) $\left(3x^2 - 5x^3 - 1 + x^4 - 4x\right) : \left(3 - 4x + x^2\right)$

b) $\left(4x^2 - 19x + 4x^3\right) : \left(-3 + 2x\right)$

c) $\left(2x^5 - 3\right) : \left(2x^2 - 4\right)$

Solución.

a. $\left(3x^2 - 5x^3 - 1 + x^4 - 4x\right) : \left(3 - 4x + x^2\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1 & x^2 - 4x + 3 \\
\hline
-x^4 + 4x^3 - 3x^2 & x^2 - x - 4 \\
\hline
\quad -x^3 \qquad\quad - 4x - 1 & \\
\quad x^3 - 4x^2 + 3x & \\
\hline
\qquad - 4x^2 - x - 1 & \\
\qquad 4x^2 - 16x + 12 & \\
\hline
\qquad\quad -17x + 11 &
\end{array}
$$

Cociente: $x^2 - x - 4$

Resto: $-17x + 11$

b. $\left(4x^2 - 19x + 4x^3\right) : \left(-3 + 2x\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 + 4x^2 - 19x & 2x - 3 \\
\hline
-4x^3 + 6x^2 & 2x^2 + 5x - 2 \\
\hline
\quad 10x^2 - 19x & \\
\quad -10x^2 + 15x & \\
\hline
\qquad -4x & \\
\qquad 4x - 6 & \\
\hline
\qquad\quad -6 &
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 + 5x - 2$

Resto: -6

c. $\left(2x^5 - 3\right) : \left(2x^2 - 4\right)$

Se ordenan los polinomios y se divide

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - 3 & 2x^2 - 4 \\
\hline
-2x^5 \qquad 4x^3 & x^3 + 2x \\
\hline
\qquad\quad 4x^3 \qquad\qquad - 3 & \\
\qquad\quad -4x^3 \qquad + 8x & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 8x - 3 &
\end{array}
$$

Cociente: $x^3 + 2x$

Resto: $8x - 3$

2. Utilizando Ruffini, hallar el cociente y el resto de las divisiones:

a) $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right):(x-2)$

b) $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right):(x+3)$

c) $\left(x^5 - 32\right):(x+2)$

Solución.

a. $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right):(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 11 & 10 \\ 2 & & 2 & 2 & 26 \\ \hline & 1 & 1 & 13 & \boxed{36} \end{array} \qquad \frac{x^3 - x^2 + 11x - 10}{x-2} = x^2 + x + 13 + \frac{36}{x-2}$$

Cociente = $x^2 + x + 13$
Resto = 36

b. $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right):(x+3)$ Se empieza ordenando el polinomio dividendo.

$$\left(x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 3x + 20\right):(x+3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 8 & 12 & -3 & 20 \\ -3 & & -3 & -15 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & 6 & \boxed{2} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 3x + 20}{x+3} = x^3 + 5x^2 - 3x + 6 + \frac{2}{x+3}$$

Cociente = $x^3 + 5x^2 - 3x + 6$
Resto = 2

c. $\left(x^5 - 32\right):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & \boxed{-64} \end{array} \qquad \frac{x^5 - 32}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 - \frac{64}{x+2}$$

Cociente = $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$
Resto = -66

3. Calcular el resto de las divisiones empleando el teorema del resto:

a) $\left(x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7\right):(x+1)$

b) $\left(\dfrac{x^4}{9} + \dfrac{5x}{6} - x^2\right):(x-3)$

c) $\left(x^6 + 1\right):(x+2)$

Solución.

a. $\text{Resto}\left(\dfrac{x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7}{x+1}\right) = P(-1) = (-1)^5 - 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 7 = -3$

b. $\text{Resto}\left(\dfrac{\dfrac{x^4}{9} - x^2 + \dfrac{5x}{6}}{x-3}\right) = P(3) = \dfrac{3^4}{9} - 3^2 + \dfrac{5\cdot 3}{6} = \dfrac{5}{2}$

c. $\text{Resto}\left(\dfrac{x^6 + 1}{x+2}\right) = P(-2) = (-2)^6 + 1 = 65$

4. Averiguar el resto de las divisiones. Si son exactas calcular también el cociente y poner el dividendo como producto de dos factores:

a) $\left(3x^4 + 5x^3 - x - 10\right) : (x + 2)$

b) $\left(5x - 3x^3 + 8x^2 - 6\right) : (x - 3)$

Solución.

a. $\text{Resto}\left(\dfrac{-3x^3 + 8x^2 + 5x - 6}{x - 3}\right) = P(3) = -3 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 0$

Para descomponerlo se plica Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & 0 & -1 & -10 \\ -2 & & -6 & 2 & -4 & 10 \\ \hline & 3 & -1 & 2 & -5 & \boxed{0} \end{array} \qquad 3x^4 + 5x^3 - x - 10 = \left(3x^3 - x^2 + 2x - 5\right) \cdot (x + 2)$$

b. $\text{Resto}\left(\dfrac{3x^4 + 5x^3 - x - 10}{x + 2}\right) = P(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 5 \cdot (-2)^3 - (-2) - 10 = 0$

Para descomponerlo se plica Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 8 & 5 & -6 \\ 3 & & -9 & -3 & 6 \\ \hline & -3 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \qquad -3x^3 + 8x^2 + 5x - 6 = \left(-3x^2 - x + 2\right) \cdot (x - 3)$$

5. Hallar p para que sea exacta la división: $\left(x^2 - 2x + p\right) : (x - 3)$

Solución.

El parámetro p se calcula mediante el teorema del resto:

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x - a}\right) = P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^2 - 2x + p}{x - 3}\right) = P(3)$$

Si ls división es exacta, el resto es cero.

$$P(3) = 0$$

$$3^2 - 2 \cdot 3 + p = 0 \ : \ p + 3 = 0 \ : \ p = -3$$

6. ¿Qué valor ha de tomar m para que: $x^5 - 8x^2 + mx - 6x^6 + 1$ sea divisible por $(x - 4)$?

Solución.

Aplicando el teorema del resto se calcula el parámetro m. Que el polinomio sea divisible por el binomio x – 4, indica que el resto de la división es cero.

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x - a}\right) = P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{-6x^6 + x^5 - 8x^2 + mx + 1}{x - 4}\right) = P(4)$$

$$-6 \cdot 4^6 + 4^5 - 8 \cdot 4^2 + m \cdot 4 + 1 = 0 \ : \ 4m - 23679 = 0 \ : \ m = \frac{23679}{4}$$

7. Hallar K para que (-2) sea un cero del polinomio $x^2 - 3x^3 + 2Kx - 4$

Solución.

Si –2 sea un cero del polinomio, el valor numérico el polinomio para x = –2 es cero. El ejercicio es identico a los anteriores del teorema del resto, solo cambia la forma de enunciarlo.

$$P(-2) = 0$$

$$P(-2) = -3 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 2K \cdot (-2) - 4 = 0$$

$$24 - 4k = 0 \ : \ k = 6$$

8. Calcula m para que al dividir $x^3 - x^2 + mx - 3$ por $x + 2$ el resto sea -1.

Solución.

Aplicando el teorema del resto se calcula el valor del parámetro m.

$$\text{Resto}\left(\frac{P(x)}{x-a}\right) = P(a)$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 - x^2 + mx - 3}{x+2}\right) = P(-2)$$

$$-1 = (-2)^3 - (-2)^2 + m(-2) - 3$$

$$-1 = -15 - 2m \ : \ 2m = -14 \ : \ m = -7$$

9. Calcula a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 15$ sea divisible por $(x-3)$ y por $(x-5)$. Factoriza el polinomio resultante.

Solución.

Aplicando dos veces el teorema del resto se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas (a, b). Divisible equivale a resto cero

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 + ax^2 + bx + 15}{x-3}\right) = P(3) \ : \ 0 = 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 15$$

$$\text{Resto}\left(\frac{x^3 + ax^2 + bx + 15}{x-5}\right) = P(5) \ : \ 0 = 5^3 + a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 15$$

Ordenando se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 9a + 3b = -42 \\ 25a + 5b = -140 \end{cases} : \begin{cases} 3a + b = -14 \\ 5a + b = -28 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se elimina b y se calcula a.

$$-2a = 14 \ : \ a = -7$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación se calcula b

$$3 \cdot (-7) + b = -14 \ : \ b = 7$$

El polinomio queda:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$

Para descomponerlo se utiliza el método de Ruffini, pero se tiene en cuenta que 3 y 5 son raíces del polinomio.

$$P(x) = x^3 + 7x^2 - 7x + 15$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 7 & 15 \\ 3 & & 3 & -12 & -15 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \\ 5 & & 5 & 5 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$$P(x) = (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)$$

10. Descomponer factorialmente los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

c) $R(x) = x^5 - 16x$

d) $S(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

e) $T(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2$

Solución.

Para factorizar un polinomio se utilizará: factor común (en el caso de que el polinomio no tenga término independiente) expresiones notables, teorema del factor, resolución de ecuaciones de segundo grado, teorema de factor y fundamentalmente método de Ruffini.

a. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \lfloor 0 \\
-1 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \lfloor 0 & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

$$P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

b. $Q(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -16 & -4 & 48 \\
2 & & 2 & 6 & -20 & -48 \\
\hline
 & 1 & 3 & -10 & -24 & \lfloor 0 \\
-2 & & -2 & -2 & 24 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -12 & \lfloor 0 & \\
3 & & 3 & 12 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & \lfloor 0 & & \\
-4 & & -4 & & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & & &
\end{array}$$

$$Q(x) = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

c. $R(x) = x^5 - 16x = x\cdot(x^4 - 16) = x\cdot(x^4 - 4^2) = x\cdot(x^2 - 4)\cdot(x^2 + 4) = x\cdot(x^2 - 2^2)\cdot(x^2 + 4)$

$$R(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)$$

d. $S(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -4 & -10 & 12 \\
1 & & 2 & -2 & -12 \\
\hline
 & 2 & -2 & -12 & \lfloor 0 \\
-2 & & -4 & 12 & \\
\hline
 & 2 & -6 & \lfloor 0 & \\
3 & & 6 & & \\
\hline
 & 2 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

$$S(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

e. $T(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 = x^2\cdot(x^4 - 2x^2 + 3)$

$x^4 - 2x^2 + 3$ Polinomio irreducible

11. Hallar el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes grupos de polinomios.

a) $x^3 - 1$; $x^2 - x$; $x^2 - 1$

b) $x^4 - 16$; $x^2 - 4$

c) $5x - 10$; $15x^2 - 60$; $3x^2 - 12x + 12$

Solución.

Para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un conjunto de polinomios es necesario factorizar los polinomios.

M.C.D. ≡ Comunes elevados al menor exponente

m.c.m. ≡ Comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

a.
$$\left.\begin{array}{r} x^3 - 1 = (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right) \\ x^2 - x = x\cdot(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1) \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.} = (x-1) \\ \text{m.c.m.} = (x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right) \end{cases}$$

b.
$$\left.\begin{array}{r} x^4 - 16 = (x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2 + 4\right) \\ x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2) \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.} = (x+2)\cdot(x-2) \\ \text{m.c.m.} = (x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+4\right) \end{cases}$$

c.
$$\left.\begin{array}{r} 5x - 10 = 5\cdot(x-2) \\ 15x^2 - 60 = 3\cdot 5\cdot(x+2)\cdot(x-2) \\ 3x^2 - 12x + 12 = 3\cdot(x-2)^2 \end{array}\right\} : \begin{cases} \text{M.C.D.} = (x-2) \\ \text{m.c.m.} = 3\cdot 5\cdot(x-2)^2\cdot(x+2) \end{cases}$$

12. Determinar a y b para que $(x-3)$ sea una raíz doble del polinomio $x^3 + ax^2 + 7x + b$. Factoriza el polinomio resultante.

Solución.

Aplicando el método de Ruffini dos veces e igualando en cada caso el resto a cero se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

	1	a	7	b
3		3	3a+9	9a+48
	1	a+3	3a+16	9a+b+48 = 0
3		3	3a+18	
	1	a+6	6a+34 = 0	

$$\begin{cases} 9a + b = -48 \\ 6a = -34 \end{cases} : \ a = -\frac{17}{3} \ : \ b = 3$$

13. Descomponer las siguientes expresiones en fracciones simples.

a) $\dfrac{5x+4}{x^2 + x - 2}$

b) $\dfrac{-x-5}{x^2 - 2x - 3}$

c) $\dfrac{4x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

Solución.

a. Se factoriza el denominador: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

Se descompone en tantas fracciones como factores tenga el denominador, colocando como numerador de cada fracción un polinomio de un grado menor, en este caso por ser los factores del denominador de grado uno, en el numerador se ponen de grado cero, es decir, constantes.

$$\frac{5x+4}{x^2+x-2} = \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Calculo de constantes: Se suman las fracciones y se igualan los numeradores.

$$\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x-1)}{x+2}+\frac{B(x+2)}{x-1}$$
$$5x+4=A(x-1)+B(x+2)$$

Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador.

- Para $x=-2$: $5\cdot(-2)+4=A(-2-1)+B(-2+2)$: $-6=-3A+B\cdot 0 : A=2$
- Para $x=1$: $5\cdot 1+4=A(1-1)+B(1+2)$: $9=A\cdot 0+3B : B=3$

$$\frac{5x+4}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-1}$$

b. Se factoriza el denominador: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$$\frac{-x-5}{x^2-2x-3}=\frac{-x-5}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Igualamos los numeradores.

$$-x-5=A(x-3)+B(x+1)$$

Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador.

- $x=3$: $-3-5=A(3-3)+B(3+1)$; $-8=A\cdot 0+B\cdot 4$; $B=-2$
- $x=-1$: $-(-1)-5=A(-1-3)+B(-1+1)$: $-4=A\cdot(-4)+B\cdot 0$; $A=1$

$$\frac{-x-5}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{x-3}$$

c. Se factoriza el denominador: $x^3-2x^2+x-2=(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)$

Para descomponer en fracciones recordar que en el numerador hay que poner un polinomio de un grado menor (en el numerador de x^2+1 se pone Mx + n).

$$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{4x^2-3}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+n}{x^2+1}=\frac{A\cdot\left(x^2+1\right)+(Mx+n)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}$$

Igualamos los numeradores.

$$4x^2-1=A\cdot\left(x^2+1\right)+(Mx+n)\cdot(x-2)$$

Se dan valores a x para calcular las constantes, empezando por las raíces del denominador, en este caso como solo hay una raíz, se deberán elegir dos valores cualquiera, buscando siempre lo más sencillo (0, 1).

- $x=2$: $4\cdot 2^2-1=A\cdot\left(2^2+1\right)+(M\cdot 2+n)\cdot(2-2)$; $15=A\cdot 5+(2M+n)\cdot 0$: $A=3$
- $x=0$: $4\cdot 0^2-1=3\cdot\left(0^2+1\right)+(M\cdot 0+n)\cdot(0-2)$; $-1=3-2n$; $n=2$
- $x=1$: $4\cdot 1^2-1=3\cdot\left(1^2+1\right)+(M\cdot 1+2)\cdot(1-2)$; $3=6-M-2$: $M=1$

$$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{3}{x-2}+\frac{x+2}{x^2+1}$$

14. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{x^2+2x+1}-\frac{x+3}{x^2-x}$

b) $\frac{x-2}{x^2+2x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{4}{x^2-1}$

c) $\frac{x-2}{x+3}\div\frac{x^2-2x}{x^2+6x+9}$

d) $\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}$

e) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)$

f) $\left(\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2-x}{1-x^4}\right)\div\dfrac{x}{1-x^2}$

g) $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1+2x+x^2}-\dfrac{1-2x}{1+x}$

h) $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\div\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

i) $\left(\dfrac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}+\dfrac{1}{1+\frac{x}{a}}-\dfrac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)\div\dfrac{1-\frac{a-3x}{a+x}}{\frac{3a+x}{a-x}-3}$

Solución.

a. Se factorizan los denominadores para obtener el mínimo común múltiplo.

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{x^2+2x+1}-\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{x+3}{x\cdot(x-1)}=$$

$$=\left\{\text{m.c.m.}\begin{pmatrix}(x+1)(x-1)\\(x+1)^2\\x\cdot(x-1)\end{pmatrix}=x(x+1)^2(x-1)\right\}=\frac{1\cdot x\cdot(x+1)+4\cdot x\cdot(x-1)-(x+3)\cdot(x+1)^2}{x(x+1)^2(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x+4x^2-4x-(x+3)\cdot\left(x^2+2x+1\right)}{x(x+1)^2(x-1)}=\frac{5x^2-3x-\left(x^3+2x^2+x+3x^2+6x+3\right)}{x(x+1)^2(x-1)}=$$

$$=\frac{-x^3-10x-3}{x(x+1)^2(x-1)}=-\frac{x^3+10x+3}{x(x+1)^2(x-1)}$$

b. $$\frac{x-2}{x^2+2x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{x-2}{(x+3)(x-1)}+\frac{2x}{x+3}-\frac{4}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\left\{\text{m.c.m.}\begin{pmatrix}(x+3)(x-1)\\x+3\\(x+1)(x-1)\end{pmatrix}=(x+3)(x+1)(x-1)\right\}=\frac{(x-2)(x+1)+2x(x+1)(x-1)-4(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-2x-2+2x\left(x^2-1\right)-4x-12}{(x+3)(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-x-2+2x^3-2x-4x-12}{(x+3)(x+1)(x-1)}=\frac{2x^3+x^2-7x-14}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

c. $\dfrac{x-2}{x+3}\div\dfrac{x^2-2x}{x^2+6x+9}$ Se factoriza, se opera en cruz y se simplifica.

$$\frac{x-2}{x+3}\div\frac{x^2-2x}{x^2+6x+9}=\frac{x-2}{x+3}:\frac{x(x-2)}{(x+3)^2}=\frac{(x-2)(x+3)^2}{(x+3)x(x-2)}=\frac{x+3}{x}$$

d. $\left(\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ Primero se opera el paréntesis y a continuación el producto.

$$\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\left(\frac{4x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x-2(x+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{4x-2x-2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x-1}$$

e. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)$ Primero se operan los paréntesis y a continuación se divide.

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}\right)=\frac{b+a}{b}\div\frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{b+a}{b}\div\frac{a+b}{b}=\frac{(b+a)b}{b(a+b)}=1$$

f. $\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{2-x}{1-x^4}\right)\div\frac{x}{1-x^2}$ Para facilitar los cálculos empezamos por cambiar el signo a los factores de la segunda fracción del paréntesis, a continuación se factorizan los denominadores empleando Ruffini y expresiones notables y por último se opera y simplifica.

$$\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{2-x}{1-x^4}\right)\div\frac{x}{1-x^2}=\left(\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{x-2}{x^4-1}\right)\div\frac{x}{1-x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}\right)\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\right)\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{1(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\div\frac{x}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{1(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)x}=\frac{1-x}{(x-1)(x^2+1)x}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+1)x}=\frac{1}{(x^2+1)x}$$

g. $$\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}+\frac{1+x}{(1+x)^2}-\frac{1-2x}{1+x}=$$

$$=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x+1-(1-2x)}{1+x}=\frac{x+1-1+2x}{1+x}=\frac{3x}{1+x}$$

h. $$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)-1(x-1)}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-x+1}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x}{x+1}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}=\frac{x^2+1}{(x-1)x}$$

i. $$\left(\frac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}+\frac{1}{1+\frac{x}{a}}-\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)\div\frac{1-\frac{a-3x}{a+x}}{\frac{3a+x}{a-x}-3}=\left(\frac{\frac{a^2+x^2}{ax}}{\frac{a^2-x^2}{ax}}+\frac{1}{\frac{a+x}{a}}-\frac{1}{\frac{a-x}{a}}\right)\div\frac{\frac{1(a+x)-(a-3x)}{a+x}}{\frac{3a+x-3(a-x)}{a-x}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{a+x-a+3x}{a+x}}{\frac{3a+x-3a+3x}{a-x}}=\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{a+x-a+3x}{a+x}}{\frac{3a+x-3a+3x}{a-x}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+x^2}{(a+x)(a-x)}+\frac{a}{a+x}-\frac{a}{a-x}\right)\div\frac{\frac{4x}{a+x}}{\frac{4x}{a-x}}=\frac{a^2+x^2+a(a-x)-a(a+x)}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=$$

$$=\frac{a^2+x^2+a^2-ax-a^2-ax}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{a^2-2ax+x^2}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a-x)^2}{(a+x)(a-x)}\div\frac{a-x}{a+x}=$$

$$=\frac{a-x}{a+x}\div\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a-x)}=1$$